Proceedings of IAM, V.10, N.1, 2021, pp.25-44

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКИМИ ДЕМПФЕРАМИ*

Фикрет А. Алиев[1], Н.А. Алиев[1] , И.А.Магеррамов[2], Е.В.Мамедова[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2]Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Абстракт. Рассматриваемая работа посвящена исследованию решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными в подчиненном члене. Исходное уравнение преобразуется в интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно второго производного искомой функции, где ее решение определяется с помощью резольвентного ядра в виде ряда Неймана, который может хорошо поддаваться нахождению численных решений. Результаты иллюстрируются на одном конкретном примере.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения дробного производного задачи Коши, интегральное уравнение Вольтерра, резольвента ядра, ряд Неймана.

AMS Subject Classification: 26A33

1. Введение

Как известно, дифференциальные уравнения колебательных систем [13,16,20,23] играют важную роль в решении некоторых технических задач, как управление спутниками [14, 22], роботами [15,17,18,21], добычей нефти штанг-насосной установкой [4, 8] и т. д. Однако когда плунжер двигается внутри Ньютоновской жидкости, смысл уравнения КС полностью меняется и в дифференциальных уравнениях в подчиненном члене появляется дробное производное [3,6, 10], которое резко отличается от классической постановки [12] и требуются дополнительные исследования.

В данной работе в отличии [1, 2, 5, 7, 11] сначала обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с дробной производной сводим к интегральному уравнению Вольтерра (ИУВ) второго рода [9,19] относительно второго производного искомой функции. Далее с помощью метода последовательных подстановок решение интегрального уравнения получается в виде ряда Неймана с помощью соответствующего резольвентного ядра. Этот вид решения является удобным для численного расчета. Результаты иллюстрируются одним простым примером.

*The work was presented at the webinar of the Institute of Applied Mathematics 09/02/2021

2. Постановка задачи

Рассмотрим_задачу Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, подчиненный член в котором содержит производное с дробным порядком $\alpha \in (1,2)$, т.е.

$$y''(x) + aD^{\alpha} y(x) + by(x) = f(x), \qquad x > 0, \quad \alpha \in (1,2) \;, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = y_{10} \end{array}\right\} \tag{2}$$

где a, b и y_{10} заданные вещественные постоянные числа, $f(x)$ -заданная вещественнозначная непрерывная функция, $y(x)$-искомая функция, $\alpha \in (1,2)$

3. Преобразование уравнений задачи Коши

Уравнения (1) преобразуем так, чтобы все слагаемые, входящие в левую часть содержали лишь второе производное

$$D^{\alpha} y(x) = DD^{\alpha-1} y(x) \;, \tag{3}$$

т.к. $\alpha - 1 \in (0,1)$, то имеем [3]

$$D^{\alpha-1} y(x) = D\int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} y(t)dt = -D\int_0^x y(t) d_t \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} =$$

$$-D\left[y(t) \cdot \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\Bigg|_{t=0}^{x} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} \cdot y'(t)dt \right];$$

учитывая что $2 - \alpha > 0$, получим:

$$\mathrm{D}^{\alpha-1}\,\mathrm{y(x)} = -D\left[y(x)\cdot\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} - y(0)\frac{\mathrm{x}^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} - \int_0^x y'(t)\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}dt \right] = \tag{4}$$
$$y(0)\frac{\mathrm{x}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + \int_0^x y'(t)\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt == \int_0^x y'(t)\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt$$

При получении (4) учитывали первое начальное условие (2). Еще раз проводя интегрирование по частям, имеем:

$$\mathrm{D}^{\alpha-1}\,\mathrm{y(x)} = -\int_0^x y'(t)d_t\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} = -\left[y'(t)\cdot\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\Bigg|_{t=0}^{x} - \int_0^x \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}y''(t)dt \right] = \tag{5}$$
$$y'(0)\frac{\mathrm{x}^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} + \int_0^x \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}y''(t)dt == \frac{\mathrm{x}^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}y_{10} + \int_0^x \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}y''(t)dt$$

При получении (5) опять использовано начальное условие (2). Подставляя (5) в (3) имеем:

$$\mathrm{D}^{\alpha}\,\mathrm{y(x)} = \mathrm{D}\frac{\mathrm{x}^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\,\mathrm{y}_{10} + D\int_0^x \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!}\cdot y''(t)dt = \frac{\mathrm{x}^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\,\mathrm{y}_{10} + \int_0^x \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\cdot y''(t)dt \tag{6}$$

Теперь рассмотрим третье слагаемое в левой части (1), т.е.

$$\mathrm{y(x)} = \int_0^x y'(t)dt + y(0) = \int_0^x y'(t)dt = \int_0^x dt\left[\int_0^t y''(\tau)d\tau + y'(0)\right] = \int_0^x dt\int_0^t y''(\tau)d\tau + y'(0)\int_0^x dt = \int_0^x y''(\tau)d\tau\int_\tau^x dt + y_{10}\cdot x = \tag{7}$$
$$= \int_0^x (x-\tau)y''(\tau)d\tau + y_{10}\cdot x$$

Подставляя (6) и (7) в уравнения (1), получим:

$$y''(x)+\alpha\left[\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y_{10}+\int_0^x\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\cdot y''(t)dt\right]+b\left[\int_0^x(x-t)y''(t)dt+y_{10}\cdot x\right]=f(x),$$

или

$$y''(x)=f(x)-\alpha\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}y_{10}-a\int_0^x\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\cdot y''(t)dt-b\int_0^x(x-t)y''(t)dt-by_{10}\cdot x,$$

или же

$$z(x)=-\int_0^x K_\alpha(x-t)z(t)dt+F(x), \tag{8}$$

где

$$z(x)=y''(x), \tag{9}$$

$$K_\alpha(x-t)=\alpha\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x-t), \tag{10}$$

$$F(x)=f(x)-\left[\alpha\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bx\right]y_{10}. \tag{11}$$

Таким образом, обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, имеющий подчиненный член с дробными производными (1) сведено к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (8), которое хорошо поддается исследованию методом последовательных подстановок.

4. Метод последовательных подстановок

Определяя z(t) из интегрального уравнения (8) и подставляя ее в то же уравнение под знаком интеграла, имеем:

$$z(t)=-\int_0^t K_\alpha(t-\tau)z(\tau)d\tau+F(t)$$

$$z(x) = -\int_0^x K_\alpha(x-t)dt\left[-\int_0^t K_\alpha(t-\tau)z(\tau)d\tau + F(t)\right] + F(x) = \int_0^x K_\alpha(x-t)dt\int_0^t K_\alpha(t-\tau)z(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^x K_\alpha(x-t)F(t)dt + F(x) = \int_0^x z(\tau)d\tau\int_\tau^x K_\alpha(x-t)K_\alpha(t-\tau)dt + F(x) - \int_0^x K_\alpha(x-t)F(t)dt \tag{12}$$

Принимая обозначения:

$$K_\alpha(x-t) = K_{\alpha 1}(x-t), \tag{13}$$

$$K_{\alpha 2}(x-\tau) = \int_\tau^x K_{\alpha 1}(x-t)K_{\alpha 1}(t-\tau)dt, \tag{14}$$

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^x K_{\alpha 1}(x-t)F(t)dt \tag{15}$$

интегральное уравнение Вольтерра второго рода (8) после итерации приведенный к виду (12) примет вид:

$$z(x) = \int_0^x K_{\alpha 2}(x-\tau)z(\tau)d\tau + F_2(x) \tag{16}$$

Проведем еще итерацию, т.е. из уравнения (8) определяя $z(\tau)$ в виде

$$z(\tau) = -\int_0^\tau K_{\alpha 1}(\tau-\xi)Z(\xi)d\xi + F(\tau),$$

и подставляя его в (16), получим:

$$z(x) = \int_0^x K_{\alpha 2}(x-\tau)d\tau\left[-\int_0^\tau K_{\alpha 1}(\tau-\xi)z(\xi)d\xi + F(\tau)\right] + F_2(x) =$$
$$= -\int_0^x K_{\alpha 2}(x-\tau)d\tau\int_0^\tau K_{\alpha 1}(\tau-\xi)z(\xi)d\xi + \int_0^x K_{\alpha 2}(x-\tau)F(\tau)d\tau + F_2(x) = \tag{17}$$
$$= -\int_0^x z(\xi)d\xi\cdot\int_\xi^x K_{\alpha 2}(x-\tau)\cdot K_{\alpha 1}(\tau-\xi)d\tau + F_2(x) + \int_0^x K_{\alpha 2}(x-\tau)F(\tau)d\tau$$

Принимая обозначения:

$$K_{\alpha 3}(x-\xi)=\int_{\xi}^{x}K_{\alpha 2}(x-\tau)K_{\alpha 1}(\tau-\xi)d\tau, \tag{18}$$

и

$$F_3(x)=F_2(x)+\int_{0}^{x}K_{\alpha 2}(x-\tau)F(\tau)d\tau \tag{19}$$

после второй итерации полученное уравнение (17) примет вид:

$$z(x)=-\int_{0}^{x}K_{\alpha 3}(x-\xi)z(\xi)d\xi+F_3(t) \tag{20}$$

Продолжая этот процесс последовательных подстановок после (n-1) –й итерации получим:

$$z(x)=(-1)^n\int_{0}^{x}K_{\alpha n}(x-t)z(t)dt+F_n(x) \tag{21}$$

где

$$K_{\alpha n}(x-t)=\int_{t}^{x}K_{\alpha n-1}(x-\tau)K_{\alpha 1}(\tau-t)d\tau \tag{22}$$

$$F_n(x)=F(x)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\int_{0}^{x}K_{\alpha k}(x-t)F(t)dt \tag{23}$$

5. Сходимость и резольвента ядра

Пусть имеет место следующее ограничение:

$$\left|K_{\alpha 1}(x-t)\right|\le K,\ \left|F(x)\right|\le F \tag{24}$$

тогда из (14) получим

$$\left|K_{\alpha 2}(x-\tau)\right|=\left|\int_{\tau}^{x}K_{\alpha 1}(x-t)K_{\alpha 1}(t-\tau)dt\right|\le\int_{\tau}^{x}\left|K_{\alpha 1}(x-t)\right|\left|K_{\alpha 1}(t-\tau)\right|dt\le K^2(x-\tau), \tag{25}$$

$$\left|K_{\alpha 3}(x-\xi)\right| = \left|\int_{\xi}^{x} K_{\alpha 2}(x-t)K_{\alpha 1}(t-\tau)dt\right| \le \int_{\tau}^{x} \left|K_{\alpha 2}(x-t)\right|\left|K_{\alpha 1}(t-\tau)\right|dt \le K^3 \int_{\xi}^{x}(x-t)dt = \tag{26}$$

$$= -K^3 \frac{(x-t)^2}{2!}\Bigg|_{t=\xi}^{x} = K^3 \frac{(x-\xi)^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс оценивания имеем:

$$\left|K_{\alpha n}(x-t)\right| \le K^n \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{27}$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left|K_{\alpha n}(x-t)\right| = 0. \tag{28}$$

Тогда переходя к пределу в (21), получим:

$$z(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \int_0^x K_{\alpha\ j}(x-t)F(t)dt, \tag{29}$$

или же учитывая (9), имеем

$$y''(x) = F(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \int_0^x K_{\alpha\ j}(x-t)F(t)dt, \tag{30}$$

Таким образом, для $y''(x)$ получен ряд Римана (30), который является резольвентой ядра $K_{\alpha 1}(x-t)$

Пример: Пусть $a = \frac{1}{10}, b = 0, f(x) = 0, y_{10} = 1, \alpha = \frac{3}{2}$,

Тогда имеем:

$$K_{\frac{3}{2},1}(x-t) = \frac{1}{10}\frac{(\mathrm{x-t})^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}, \qquad F(x) = -\frac{1}{10}\frac{\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}$$

$$K_{\frac{3}{2},2}(x-\tau)=\int_{\tau}^{x}K_{\frac{3}{2},1}(x-t)K_{\frac{3}{2},1}(t-\tau)dt=10^{-2}\int_{\tau}^{x}\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt.$$

Приведем преобразования

$$x-\mathrm{t}=\eta(\mathrm{x}-\tau)\ ,$$

тогда

$$t=x-\eta(\mathrm{x}-\tau)$$

и

$$t-\tau=x-\tau-\eta(\mathrm{x}-\tau)=(\mathrm{x}-\tau)(1-\eta),$$

т.е.

$$K_{\frac{3}{2},2}(x-\tau)=-10^{-2}\int_{1}^{0}\frac{\eta^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{x}-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\cdot\frac{(\mathrm{x}-\tau)^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}(x-\tau)d\eta=$$

$$=10^{-2}\int_{0}^{1}\frac{\eta^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\cdot\frac{(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}d\eta=\frac{10^{-2}}{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)!\right)^{2}}\int_{0}^{1}\eta^{\frac{1}{2}-1}(1-\eta)^{\frac{1}{2}-1}d\eta=\frac{10^{-2}}{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)!\right)^{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=$$

$$=\frac{10^{-2}}{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)!\right)^{2}}\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{0!}=10^{-2}$$

$$K_{\frac{3}{2},3}(x-\xi)=\int_{\xi}^{x}K_{\frac{3}{2},2}(x-t)K_{\frac{3}{2},1}(t-\xi)dt=\int_{\xi}^{x}10^{-2}10^{-1}\frac{(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt=$$

$$10^{-3}\frac{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\Bigg|_{t=\xi}^{x}=$$

$$=10^{-3}\frac{(t-\xi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}$$

$$K_{\frac{3}{2},4}(x-\xi)=\int_{\xi}^{x}K_{\frac{3}{2},3}(x-t)K_{\frac{3}{2},1}(t-\xi)dt=\int_{\xi}^{x}10^{-3}\frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}10^{-1}\frac{(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt=$$

$$=-10^{-4}\int_{1}^{0}\frac{\eta^{\frac{1}{2}}(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\cdot\frac{(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}(x-\xi)d\eta=$$

$$=10^{-4}(x-\xi)\frac{1}{\frac{1}{2}!}\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\int_{0}^{1}\eta^{\frac{3}{2}-1}(1-\eta)^{\frac{1}{2}-1}d\eta=$$

$$=\frac{10^{-4}(x-\xi)}{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}=10^{-4}\frac{(x-\xi)}{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}\frac{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{1!}=10^{-4}(x-\xi)$$

$$K_{\frac{3}{2},5}(x-\xi)=\int_{\xi}^{x}K_{\frac{3}{2},4}(x-t)K_{\frac{3}{2},1}(t-\xi)dt=\int_{\xi}^{x}10^{-4}(x-t)10^{-1}\frac{(t-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt=$$

$$=-10^{-5}\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\int_{1}^{0}\eta(x-\xi)(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}(x-\xi)d\eta=$$

$$=\frac{10^{-5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}(x-\xi)^{\frac{3}{2}}\int_{0}^{1}\eta^{2-1}(1-\eta)^{\frac{1}{2}-1}d\eta=$$

$$=\frac{10^{-5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}(x-\xi)^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{10^{-5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}(x-\xi)^{\frac{3}{2}}\frac{1!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{\frac{3}{2}!}=10^{-5}\frac{(x-\xi)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!}$$

Теперь вычислим погрешность решения, если $\varepsilon=10^{-5}$, то имеем:

$$y''(x)=F(x)+\sum_{j=1}^{5}(-1)^{j}\int_{0}^{x}K_{\frac{3}{2},j}(x-t)F(t)dt$$

При $j=5,\ (-1)^{5}\int_{0}^{x}K_{\frac{3}{2},5}(x-t)F(t)dt=10^{-6}\frac{x^{2}}{2!}$,

$j=4,$

$$\int_0^x K_{\frac{3}{2},4}(x-t)F(t)dt = -\int_0^x 10^{-4}(x-t)\cdot 10^{-1}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt = -\frac{10^{-5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\left[x\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}dt - \int_0^x t^{\frac{1}{2}}dt\right] =$$

$$= -\frac{10^{-5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\left[x\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{t=0}^{x} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{t=0}^{x}\right] = -\frac{10^{-5}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = -10^{-5}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}!} - \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}!}\right) =$$

$$= -10^{-5}x^{\frac{3}{2}}\frac{2}{\frac{1}{2}!\cdot 3} = \frac{-10^{-5}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!},$$

$j = 3,$

$$-\int_0^x K_{\frac{3}{2},3}(x-t)F(t)dt = \int_0^x 10^{-3}\frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\cdot 10^{-1}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt = -\frac{10^{-4}}{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{10^{-4}}{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}x\int_0^1 \eta^{\frac{3}{2}-1}(1\text{-}\eta)^{\frac{1}{2}-1}d\eta = \frac{10^{-4}}{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}x\frac{\frac{1}{2}!\left(-\frac{1}{2}\right)!}{1!} =$$

$$= 10^{-4}\frac{x}{1!},$$

$j = 2,$

$$\int_0^x K_{\frac{3}{2},2}(x-t)F(t)dt = -\int_0^x 10^{-2}10^{-1}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt = -10^{-3}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\Bigg|_{t=0}^{x} = -10^{-3}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!},$$

$j = 1,$

$$-\int_0^x K_{\frac{3}{2},1}(x-t)F(t)dt=\int_0^x 10^{-1}\frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\cdot 10^{-1}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}dt=$$

$$=\frac{10^{-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{10^{-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)!=10^{-2}$$

Таким образом для примера получаем:

$$y''(x)=-10^{-1}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)!}+10^{-2}-10^{-3}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}+10^{-4}\frac{x}{1!}-10^{-5}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!}+10^{-6}\frac{x^2}{2!}$$

Вычисление итерации ядер:

$$K_\alpha(x-t)=K_{\alpha,1}(x-t)=\alpha\frac{(\mathrm{x-t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x-t),$$

$$K_{\alpha,2}(x-\tau)=\int_\tau^x K_{\alpha 1}(x-t)K_{\alpha 1}(t-\tau)dt=\int_\tau^x\left[\alpha\frac{(\mathrm{x-t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x-t)\right]\left[\alpha\frac{(\mathrm{t}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(\mathrm{t}-\tau)\right]dt=$$

$$=a^2\int_\tau^x\frac{(\mathrm{x-t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\frac{(\mathrm{t}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt+ab\int_\tau^x\frac{(\mathrm{x-t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(\mathrm{t}-\tau)dt+ab\int_\tau^x(x-t)\frac{(\mathrm{t}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt+b^2\int_\tau^x(x-t)(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{dt};$$

(31)

делая замену

$$\mathrm{x-t}=\eta(\mathrm{x}-\tau),\quad \mathrm{t}=x-\eta(\mathrm{x}-\tau),\ \mathrm{t}-\tau=(x-\tau)(\mathrm{x}-\eta)$$

имеем

$$\int_{\tau}^{x}\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\frac{(\mathrm{t}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{1-\alpha}(\mathrm{x}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\cdot\frac{(\mathrm{x}-\tau)^{1-\alpha}(1-\eta)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\tau)d\eta=$$
$$=(x-\tau)^{3-2\alpha}\int_{0}^{1}\frac{\eta^{(2-\alpha)-1}(1-\eta)^{(2-\alpha)-1}}{((1-\alpha)!)^{2}}d\eta= \qquad (32)$$
$$=(x-\tau)^{3-2\alpha}\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{((1-\alpha)!)^{2}\Gamma(4-2\alpha)}=\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{((1-\alpha)!)^{2}}\frac{(1-\alpha)!^{2}}{(3-2\alpha)!}=\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}$$

$$\int_{\tau}^{x}\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(\mathrm{t}-\tau)dt=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{1-\alpha}(\mathrm{x}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\cdot(\mathrm{x}-\tau)(1-\eta)(\mathrm{x}-\tau)\mathrm{d}\eta=$$
$$=(\mathrm{x}-\tau)^{3-\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{(2-\alpha)-1}(1-\eta)^{3-1}d\eta= \qquad (33)$$
$$=\frac{(\mathrm{x}-\tau)^{3-\alpha}}{(1-\alpha)!}\frac{(1-\alpha)!}{(3-\alpha)!}=\frac{(\mathrm{x}-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}$$

$$\int_{\tau}^{x}(\mathrm{x}-\mathrm{t})\frac{(\mathrm{t}-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt=-\int_{1}^{0}\eta(x-\tau)\frac{(\mathrm{x}-\tau)^{1-\alpha}(1-\eta)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\tau)d\eta=$$
$$=(x-\tau)^{3-\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{2-1}(1-\eta)^{(2-\alpha)-1}d\eta= \qquad (34)$$
$$=(x-\tau)^{3-\alpha}\frac{1}{(1-\alpha)!}\frac{1!(1-\alpha)!}{(3-\alpha)!}=\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}$$

$$\int_{\tau}^{x}(\mathrm{x}-\mathrm{t})(\mathrm{t}-\tau)dt=-\int_{1}^{0}\eta(\mathrm{x}-\tau)(\mathrm{x}-\tau)(1-\eta)(\mathrm{x}-\tau)\mathrm{d}\eta=(\mathrm{x}-\tau)^{3}\int_{0}^{1}\eta^{2-1}(1-\eta)^{2-1}d\eta=$$
$$=(\mathrm{x}-\tau)^{3}\frac{1!\cdot 1!}{3!}=\frac{(\mathrm{x}-\tau)^{3}}{3!} \qquad (35)$$

Подставляя (32)-(35) в (31), получим:

$$K_{\alpha,2}(x-\tau)=a^2\,\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}+2ab\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}+b^2\,\frac{(x-\tau)^3}{3!} \qquad (36)$$

Подобно (36), вычислим третью итерацию ядра интегрального уравнения Вольтерра второго рода (8) из соотношения (18)

$$K_{\alpha,3}(x-\xi)=\int_{\xi}^{x}K_{\alpha 2}(x-\tau)K_{\alpha 1}(\tau-\xi)d\tau$$

Учитывая (10), (13) в (36) в последнем выражении имеем:

$$K_{\alpha,3}(x-\xi)=\int_{\xi}^{x}\left[a^2\,\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}+2ab\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}+b^2\,\frac{(x-\tau)^3}{3!}\right]\left[a\,\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(\tau-\xi)\right]d\tau=$$

$$=a^3\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\,\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau+a^2b\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\,(\tau-\xi)d\tau+ \qquad (37)$$

$$+2a^2b\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\,\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau+$$

$$+2ab^2\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}(\tau-1)d\tau+ab^2\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^3}{3!}\,\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau+b^3\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^3}{3!}\,(\tau-\xi)d\tau$$

Вычислим интегралы входящие в правую часть соотношения (37),

$$\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\,\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{3-2\alpha}(x-\xi)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\,\frac{(x-\xi)^{1-\alpha}(1-\eta)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\xi)d\eta=$$

$$=\frac{(x-\xi)^{5-3\alpha}}{(3-2\alpha)!(1-\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{(4-2\alpha)-1}(1-\eta)^{(2-\alpha)-1}d\eta=\frac{(x-\xi)^{5-3\alpha}}{(3-2\alpha)!(1-\alpha)!}\,\frac{\Gamma(4-2\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(5-3\alpha)}= \qquad (38)$$

$$=\frac{(x-\xi)^{5-3\alpha}}{(3-2\alpha)!(1-\alpha)!}\,\frac{(3-2\alpha)!(1-\alpha)!}{(5-3\alpha)!}=\frac{(x-\xi)^{5-3\alpha}}{(5-3\alpha)!}.$$

$$\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}(\tau-\xi)d\tau=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{3-2\alpha}(x-\xi)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}(x-\xi)(1-\eta)(x-\xi)d\eta=$$
$$=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{(4-2\alpha)-1}(1-\eta)^{2-1}d\eta=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\frac{\Gamma(4-2\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(5-2\alpha)}= \tag{39}$$
$$=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\frac{(3-2\alpha)!1!}{(5-2\alpha)!(3-2\alpha)!1}=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!},$$

$$\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{3-\alpha}(x-\xi)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{(x-\xi)^{1-\alpha}(1-\eta)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\xi)d\eta=$$
$$=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(3-\alpha)!(1-\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{(4-\alpha)-1}(1-\eta)^{(2-\alpha)-1}d\eta=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(3-\alpha)!(1-\alpha)!}\frac{\Gamma(4-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(6-2\alpha)}= \tag{40}$$
$$\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(3-\alpha)!(1-\alpha)!}\frac{(3-\alpha)!(1-\alpha)!}{(5-2\alpha)!}=\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!},$$

$$\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}(\tau-\xi)d\tau=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{3-\alpha}(x-\xi)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}(t-\xi)(1-\eta)(x-\xi)d\eta=$$
$$=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(3-\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{(4-\alpha)-1}(1-\eta)^{\xi-1}d\eta=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{\Gamma(4-\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(6-\alpha)}= \tag{41}$$
$$=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{(3-\alpha)!1!}{(5-\alpha)!}=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!},$$

$$\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^{3}}{3!}\frac{(\tau-\xi)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau=-\int_{1}^{0}\frac{\eta^{3}(x-\xi)^{3}}{3!}\frac{(x-\xi)^{1-\alpha}(1-\eta)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\xi)d\eta=$$
$$=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{3!(1-\alpha)!}\int_{0}^{1}\eta^{\xi-1}(1-\eta)^{(2-\alpha)-1}d\eta=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{3!(1-\alpha)!}\frac{\Gamma(4)\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(6-\alpha)}= \tag{42}$$
$$\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{3!(1-\alpha)!}\frac{3!(1-\alpha)!}{(5-\alpha)!}=\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!},$$

$$\int_{\xi}^{x}\frac{(x-\tau)^3}{3!}(\tau-\xi)d\tau=-\int_{1}^{0}\frac{\eta 3(x-\xi)^3}{\xi!}(x-\xi)(1-\eta)(x-\xi)d\eta=$$
$$=\frac{(x-\xi)^5}{3!}\int_{0}^{1}\eta^{4-1}(1-\eta)^{2-1}d\eta=\frac{(x-\xi)^5}{3!}\frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)}= \qquad (43)$$
$$=\frac{(x-\xi)^5}{3!}\frac{3!1!}{5!}=\frac{(x-\xi)^5}{5!},$$

Подставляя (38)-(43) в (37) для третьей итерации ядра получим:

$$K_{\alpha,3}(x-\xi)=a^3\frac{(x-\xi)^{5-3\alpha}}{(5-3\alpha)!}+a^2b\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!}+2a^2b\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!}+$$
$$+2ab^2\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!}+ab^2\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!}+ \qquad (44)$$
$$+b^3\frac{(x-\xi)^5}{5!}=a^3\frac{(x-\xi)^{5-3\alpha}}{(5-3\alpha)!}+3a^2b\frac{(x-\xi)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!}+$$
$$+3ab^2\frac{(x-\xi)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!}+b^3\frac{(x-\xi)^5}{5!}$$

Продолжая этот процесс вычисления для n-й итерации ядра $K_\alpha(x-t)$, получим:

$$K_{\alpha n}(x-t)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}a^{n-m}b^m\frac{(x-t)^{2n-1-\alpha(n-m)}}{(2n-1-\alpha(n-m))!} \qquad (45)$$

Тогда задача Коши (1)-(2), приведенная к виду (30), с учетом (45) представляется с помощью следующего выражения

$$y''(x)=\left\{f(x)-\left[a\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bx\right]y_{10}\right\}+ \tag{46}$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\int_0^x\sum_{m=0}^{j}\frac{j!}{m!(j-m)!}a^{j-m}b^m\frac{(x-t)^{(2j-1)-\alpha(j-m)}}{((2j-1)-\alpha(j-m))!}\left\{f(t)-\left[a\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bt\right]y_{10}\right\}dt.$$

Сходимость ряда в (46) доказана выше.

Интегрируя (46) два раза и учитывая условие (2), имеем:

$$y'(x)=y'(0)+\int_0^x\left\{f(\xi)-\left[a\frac{\xi^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\xi\right]y_{10}\right\}d\xi+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}\sum_{m=0}^{j}\frac{j!}{m!\,(m-j)!}a^{j-m}\,b^m\frac{(\xi-t)^{(2j-1)-\alpha(j-m)}}{\big((2j-1)-\alpha(j-m)\big)!}\left\{f(t)-\left[a\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bt\right]y_{10}\right\}dt$$

и

$$y(x)=y_{10}x+\int_0^x d\eta\int_0^{\eta}\{f(\xi)-\left[a\frac{\xi^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b\xi\right]y_{10}\}d\xi+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\int_0^x d\eta\int_0^{\eta}d\xi\int_0^{\xi}\sum_{m=0}^{j}\frac{j!}{m!\,(m-j)!}a^{j-m}b^m\frac{(\xi-k)^{(2j-1)-\alpha(j-m)}}{\big((2j-1)-\alpha(j-m)\big)!}\left\{f(t)-\left[a\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+bt\right]y_{10}\right\}dt,$$

которое является решением задачи Коши (1)-(2).

Заключение: Приводится новый аналитический вид решений дифференциальных уравнений колебательных систем с жидкими демпферами, который может быть успешно применен для нахождения числа дробных производных с помощью заданных статистических данных

Литература

1. Aliev F.A, Aliev N.A., Safarova N.A. Transformation of the Mittag-Leffler Function to an Exponential Function and Some of its Applications to Problems with a Fractional Derivative. Appl.Comput. Math., V.18, N3, 2019, pp. 316-325
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I.. Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients. Appl.Comput. Math., V.17, N3, 2018, pp. 317-322
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case. Appl. Comput. Mech., V.7, N2, 2021, pp.970-976
4. Aliev Fikret A., Abbasov A.N., Mutallimov M.M.. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl.Comput.Math., V.3, N 1, 2004, pp. 2-9
5. Aliev Fikret A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Algorithm for Solving the Identification Problem for Determining the Fractional-Order Derivative of an Oscillatory System. Appl.Comput. Math., V.19, N3, 2020,pp. 415-422.
6. Aliev Fikret A., Aliev N.A., Velieva N.I., Safarova N. A. Larin Parametrization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers. Appl. Comput.Mekh, V. 6, special issue, 2020, pp.1426-1430
7. Monje C A, Chen Y Q, Vinagre B M, Xue D, Felue V. Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications. Springer, London, 2010, 414 p.
8. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Methods for solving of optimization problems in the operation of oil wells. LAP LAMBERT, Saarbrücken (Deutscland), 2012, 164 p. 18
9. Petrovski I.G. Lectures on the theory of integral equations. "Science", Moscow, 1965, 128 p.
10. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
11. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mammadova G.H., Aliev Fikret A.. Some Remarks on the Paper, entitled “Fractional and Operational Calculus with Generalized Fractional Derivative Operators and Mittag-Leffler Type Functions", by Ž. Tomovski, R. Hilfer and H.M. Srivastava, TWMS Jour. Of Pure and Appl. Math., V.8, N1, 2017, pp.112-114.
12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. Наука, Москва, 1976.
13. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, Наука, Москва,

1981, 914 с.
14. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Изд-во МГУ, Москва, 1975, 308 с.
15. Белецкий В.В., Чудинов II.С. Управление движением двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР, МТТ, Г980, 83
16. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, 1974, 408 с.
17. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко. Задачи управления шагающими аппаратами. Науково Думка, Киев, 1985
18. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. Мир, Москва, 1976, 541 с.
19. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Наука, Москва, 1980, 416 с.
20. Ларин В.Б. Статистические задачи виброзащиты. Наук. Думка, Киев, 1974, 127 с.
21. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. Науково Думка, Киев, 1980.
22. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли, Успехи физических наук, Российская академия наук, Т. 63, № 1a, 1957, с. 5—32.
23. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Наука, Москва, 1974, 331 с.

ON A NEW METHOD FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF OSCILLATORY SYSTEMS WITH LIQUID DAMPERS

Fikret A. Aliev, N. A. Aliev, I. A. Maharramov, Y. V. Mamedova

Abstract. This work is devoted to the study of the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations of the second order with fractional derivatives in the subordinate term. The original equation is transformed into an integral Volterra equation of the second kind with respect to the second derivative of the desired function, where its solution is determined using a resolvent kernel in the form of a Neumann series, which can be well suited to finding numerical solutions. The results are illustrated with one specific example.

Keywords: ordinary differential equations of the fractional derivative of the Cauchy problem, Volterra integral equation, kernel resolvent, Neumann series.

REFERENCES

1. Aliev F.A, Aliev N.A., Safarova N.A. Transformation of the Mittag-Leffler Function to an Exponential Function and Some of its Applications to Problems with a Fractional Derivative. Appl.Comput. Math., V.18, N3, 2019, pp. 316-325
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I.. Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients. Appl.Comput. Math., V.17, N3, 2018, pp. 317-322
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case. Appl. Comput. Mech., V.7, N2, 2021, pp.970-976
4. Aliev Fikret A., Abbasov A.N., Mutallimov M.M.. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl.Comput.Math., V.3, N 1, 2004, pp. 2-9
5. Aliev Fikret A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Algorithm for Solving the Identification Problem for Determining the Fractional-Order Derivative of an Oscillatory System. Appl.Comput. Math., V.19, N3, 2020,pp. 415-422.
6. Aliev Fikret A., Aliev N.A., Velieva N.I., Safarova N. A. Larin Parametrization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers. Appl. Comput.Mekh, V. 6, special issue, 2020, pp.1426-1430
7. Monje C A, Chen Y Q, Vinagre B M, Xue D, Felue V. Fractional-Order Systems and Controls. Fundamentals and Applications. Springer, London, 2010, 414 p.
8. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Methods for solving of optimization problems in the operation of oil wells. LAP LAMBERT, Saarbrücken (Deutscland), 2012, 164 p.
9. Petrovski I.G. Lectures on the theory of integral equations. "Science", Moscow, 1965, 128 p.
10. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
11. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mammadova G.H., Aliev Fikret A.. Some Remarks on the Paper, entitled “Fractional and Operational Calculus with Generalized Fractional Derivative Operators and Mittag-Leffler Type Functions", by Ž. Tomovski, R. Hilfer and H.M. Srivastava, TWMS Jour. Of Pure and Appl. Math., V.8, N1, 2017, pp.112-114.
12. Andreev Ju.N. Upravlenie konechnomernymi linejnymi ob#ektami. Nauka, Moskva, 1976 (Andreev Yu.N. Control of finite-dimensional linear objects. Science, Moscow, 1976)
13. Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.Je. Teorija kolebanij, Nauka, Moskva, 1981, 914 s. (Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Oscillation theory, Nauka,

Moscow, 1981, 914 p.)
14. 14. Beleckij V.V. Dvizhenie sputnika otnositel'no centra mass v gravitacionnom pole. Izd-vo MGU, Moskva, 1975, 308 s. .(Beletsky V.V. Satellite motion relative to the center of mass in a gravitational field. Moscow State University Publishing House, Moscow, 1975, 308 p.)
15. Beleckij V.V., Chudinov II.S. Upravlenie dvizheniem dvunogogo shagajushhego apparata. Izv. AN SSSR, MTT, G980, 83 (Beletsky V.V., Chudinov II. S. Motion control of a bipedal walking apparatus. Izv. USSR Academy of Sciences, MTT, G980, 83)
16. Bogoljubov N.N., Mitropol'skij Ju.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. Moskva, 1974, 408 s. 11(Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow, 1974, 408 p.)
17. Bordjug B.A., Larin V.B., Timoshenko. Zadachi upravlenija shagajushhimi apparatami. Naukovo Dumka, Kiev, 1985 12 (Bordyug B.A., Larin V.B., Timoshenko. Control tasks for walking vehicles. Naukovo Dumka, Kiev, 1985)
18. Vukobratovich M. Shagajushhie roboty i antropomorfnye mehanizmy. Mir, Moskva, 1976, 541 s. (Vukobratovich M. Walking robots and anthropomorphic mechanisms. Mir, Moscow, 1976, 541 p)
19. Gusejnov A.I., Muhtarov H.Sh. Vvedenie v teoriju nelinejnyh singuljarnyh integral'nyh uravnenij. Nauka, Moskva, 1980, 416 s. (Huseynov A.I., Mukhtarov Kh.Sh. Introduction to the theory of nonlinear singular integral equations. Nauka, Moscow, 1980, 416 p.)
20. Larin V.B. Statisticheskie zadachi vibrozashhity. Nauk. Dumka, Kiev, 1974, 127 s. (Larin V.B. Walking apparatus control. Naukovo Dumka, Kiev, 1980)
21. Larin V.B. Upravlenie shagajushhimi apparatami. Naukovo Dumka, Kiev, 1980.(Larin V.B. Walking apparatus control. Naukovo Dumka, Kiev, 1980)
22. Ohocimskij D. E., Jeneev T. M. Nekotorye variacionnye zadachi, svjazannye s zapuskom iskusstvennogo sputnika Zemli, Uspehi fizicheskih nauk, Rossijskaja akademija nauk, T. 63, № 1a, 1957, s. 5—32. (Okhotsimsky D.E., Eneev T.M.Some variational problems associated with the launch of an artificial Earth satellite, Uspekhi fizicheskikh nauk, Russian Academy of Sciences, Vol. 63, N1,1957, pp. 5-32)
23. Pontrjagin L.S. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Nauka, Moskva, 1974, 331 s.(Pontryagin L.S. Ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1974, 331 p)